Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 19

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

15 de mayo de 2019

Sea la acción S definida como

$$S = \frac{1}{2} \int \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 \right] \mathrm{d}^4 x \tag{1}$$

1. Demostrar que $\mathscr{L} = \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 \right]$ es invariante Lorentz

Sea Λ la transformación de Lorentz definida por

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \partial^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \partial^\mu \tag{2}$$

Entonces ∂_μ transforma como

$$\partial_{\mu'} = \eta_{\mu'\nu'} \partial^{\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} \partial^\nu = \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} \eta^{\nu\mu} \partial_\mu = \Lambda_{\mu'}{}^{\mu} \partial_\mu \tag{3}$$

Donde $\eta^{\nu\mu}$ es la matriz inversa de $\eta_{\nu\mu}$. Usando la propiedad demostrada en el ejercicio anterior $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$ obtenemos una propiedad muy interesante de $\Lambda_{\mu'}{}^{\mu}$:

$$\delta^\mu_\nu = \eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} = \eta^{\mu\alpha} \left(\Lambda^{\beta}{}_{\alpha} \eta_{\beta\mu'} \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \right) = \left(\eta^{\mu\alpha} \Lambda^{\beta}{}_{\alpha} \eta_{\beta\mu'} \right) \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \Lambda_{\mu'}{}^{\mu} \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{4}$$

Entonces ¿cómo transforma $\mathscr{L}$ bajo Λ?

$$\mathscr{L}' = \frac{1}{2}\left[\partial_{\mu'}\phi'\partial^{\mu'}\phi' - m^2\phi'^2\right] = \frac{1}{2}\left[\Lambda_{\mu'}{}^{\mu}\partial_\mu\phi'\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}\partial^\nu\phi' - m^2\phi'^2\right] \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\Lambda_{\mu'}{}^{\mu}\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}\right)\partial_\mu\phi'\partial^\nu\phi' - m^2\phi'^2\right] = \frac{1}{2}\left[\delta^\mu_\nu\partial_\mu\phi'\partial^\nu\phi' - m^2\phi'^2\right] \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi'\partial^\mu\phi' - m^2\phi'^2\right] \tag{7}$$

Vemos que, en general, $\mathscr{L}$ no es invariante, para que $\mathscr{L}$ sea invariante bajo la transformación Λ necesitamos imponer que $\phi'(x') \equiv \phi'(\Lambda x) = \phi(x)$. Fijémonos que no hemos usado la forma específica de Λ en ningún momento, por lo que toda esta demostración es válida para cualquier Λ que cumpla la condición $\eta = \Lambda^T\eta\Lambda$.

2. Calcular $\frac{\delta S}{\delta\phi}$

La definición de derivada funcional es

$$\frac{\delta S}{\delta\phi} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)} \tag{8}$$

Calculemos las dos derivadas parciales:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)} = \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\left(\frac{\eta^{\alpha\beta}}{2}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2\right) = \frac{\eta^{\alpha\beta}}{2}\frac{\partial\left(\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\right)}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)} \tag{9}$$

$$= \frac{\eta^{\alpha\beta}}{2}\left[\delta^\mu_\alpha\partial_\beta\phi + \delta^\mu_\beta\partial_\alpha\phi\right] = \frac{1}{2}\left[\partial^\mu\phi + \partial^\mu\phi\right] = \partial^\mu\phi \tag{10}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\eta^{\alpha\beta}}{2}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2\right) = -\frac{m^2}{2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\phi^2\right) = -m^2\phi \tag{11}$$

Finalmente sustituyendo a la ecuación (8)

$$\frac{\delta S}{\delta\phi} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)} = -m^2\phi - \partial_\mu\partial^\mu\phi = -\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\phi \tag{12}$$